

Báze, dimenze a LN

Definice. Je-li $(V, +, \cdot)$ vektorový prostor nad $\mathbb{K}$ a $m \in \mathbb{N}$, $u_1, \dots, u_m \in V$, $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{K}$, pak vektor

$$\lambda_1 \cdot u_1 + \dots + \lambda_m u_m$$

nazýváme **lineární kombinace vektorů** $u_1, \dots, u_m$. Pokud jsou všechna λ_i rovna nule, pak jde o **triviální lineární kombinaci**, v opačném případě o **netriviální lineární kombinaci**. Lineární kombinací prázdné množiny vektorů rozumíme nulový vektor.

Definice. Nechť $(V, +, \cdot)$ je vektorový prostor, $m \in \mathbb{N}$ a $u_1, \dots, u_m \in V$. Řekneme, že vektory $u_1, \dots, u_m$ jsou **lineárně závislé**, pokud existuje jejich netriviální lineární kombinace, jež je rovna nulovému vektoru. Pokud vektory $u_1, \dots, u_m$ nejsou lineárně závislé, pak říkáme, že jsou **lineárně nezávislé**. Řekneme, že množina $M \subseteq V$ je **lineárně nezávislá**, jestliže libovolná m -tice po dvou různých vektorů z M je lineárně nezávislá.

Poznámka. Někdy se používá: LN = lineárně nezávislá.

Definice. Je-li $(V, +, \cdot)$ vektorový prostor nad $\mathbb{K}$, $m \in \mathbb{N}$ a $u_1, \dots, u_m \in V$, pak **lineární obal vektorů** $u_1, \dots, u_m$ je

$$\text{lin}_{\mathbb{K}}\{u_1, \dots, u_m\} = \{v \in V : v \text{ je lineární kombinací vektorů } u_1, \dots, u_m\}.$$

Definice. Nechť $(V, +, \cdot)$ je vektorový prostor a $B \subseteq V$. Řekneme, že B je **báze prostoru** V , jestliže množina B je lineárně nezávislá a $V = \text{lin}_{\mathbb{K}}(B)$.

Poznámka. Pokud $\text{lin}_{\mathbb{K}}(B) = V$, tak říkáme, že B **generuje** prostor V . Platí tedy, že pokud je B LN a generuje V , tak je bází prostoru V .

Věta 10.1.

- (i) Každou lineárně nezávislou podmnožinu vektorového prostoru lze doplnit na bázi tohoto prostoru.
- (ii) Každý vektorový prostor má bázi. Počet prvků báze je určen jednoznačně.

Definice. Počet prvků báze budeme nazývat **dimenze prostoru** V . Dimenzi V značíme $\dim V$. Nechť V je vektorový prostor nad $\mathbb{K}$. Je-li $\dim V < \infty$, řekneme, že V je **konečnědimenzionální**. Je-li $\dim V = +\infty$, mluvíme o **nekonečnědimenzionálním** vektorovém prostoru.

Lineární zobrazení, jádro a obraz

Definice. Nechť U, V jsou vektorové prostory nad $\mathbb{K}$. Pak zobrazení $L: U \rightarrow V$ je **lineární**, pokud

- $\forall u_1, u_2 \in U: L(u_1 + u_2) = L(u_1) + L(u_2)$
- $\forall a \in \mathbb{K} \forall u \in U: L(a \cdot u) = a \cdot L(u)$.

Věta 10.3. Nechť U a V jsou vektorové prostory nad $\mathbb{K}$, $L: U \rightarrow V$ nechť je lineární zobrazení. Potom platí:

- (i) $\text{Ker } L$ je vektorový podprostor U .

(ii) $\text{Im } L$ je vektorový podprostor V .

(iii) $\dim U = \dim \text{Ker } L + \dim \text{Im } L$.

Věta 5.18 z 2. semestru. Zobrazení $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ je lineární právě tehdy, když existuje $A \in M(n \times n)$ taková, že

$$\forall u \in \mathbb{R}^n: f(u) = Au.$$

Determinant

Definice. Nechť A je matice typu $n \times n$ s reálnými prvky. Maticí A_{ij} rozumíme matici typu $(n-1) \times (n-1)$, která vznikne z A vynecháním i -tého řádku a j -tého sloupce.

Definice. Nechť $A = (a_{ij})_{i=1,\dots,n,j=1,\dots,n}$. Pak **determinant matice** A definujeme takto:

$$\det A = \begin{cases} a_{11}, & n = 1 \\ \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} a_{i1} \det A_{i1}, & n > 1. \end{cases}$$

Pro $\det A$ budeme též používat symbol

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Věta 5.8 z 2. semestru. Nechť $A \in M(n \times n)$.

- (i) Nechť matice A' vznikne z A vyměněním dvou řádků mezi sebou. Pak $\det A' = -1 \det A$.
- (ii) Nechť matice A' vznikne z A tak, že v A jeden řádek vynásobíme reálným číslem λ , pak platí $\det A' = \lambda \det A$.
- (iii) Nechť matice A' vznikne z A tak, že λ -násobek jednoho řádku přičtu k jinému řádku (tj. provedeme třetí řádkovou elementární úpravu), pak $\det A' = \det A$.

Věta 5.9 z 2. semestru. Pro $A \in M(n \times n), j \in \{1, \dots, n\}$ platí

$$\det A = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij}.$$

Věta 5.10 z 2. semestru. Je-li $A \in M(n \times n)$ je horní (resp. dolní) trojúhelníková matice, pak

$$\det A = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \dots \cdot a_{nn}.$$

Kvadratická forma a definitnost

Definice. Pokud pro $A \in M(n \times n)$ platí $A = A^T$, pak je A **symetrická**.

Je-li $A \in M(n \times n)$ symetrická, pak $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ daná předpisem $\varphi(u) = u^T A u$ je **kvadratická forma** reprezentovaná maticí A .

Věta 10.4. Nechť $A = (a_{ij})_{i=1,\dots,n,j=1,\dots,n}$ je diagonální. Pak platí:

- A je pozitivně definitní, právě když $a_{ii} > 0$ pro každé $i = 1, \dots, n$,
- A je negativně definitní, právě když $a_{ii} < 0$ pro každé $i = 1, \dots, n$,
- A je pozitivně semidefinitní, právě když $a_{ii} \geq 0$ pro každé $i = 1, \dots, n$,
- A je negativně semidefinitní, právě když $a_{ii} \leq 0$ pro každé $i = 1, \dots, n$,
- A je indefinitní, právě když existují $i, j \in \{1, \dots, n\}$ taková, že $a_{ii} > 0, a_{jj} < 0$.

Definice. Symetrická úprava matice $A \in M(n \times n)$ = úprava aplikovaná na řádky A a následně tatáž úprava aplikovaná na sloupce A . **Symetrická transformace matice** A = konečná posloupnost symetrických úprav.

Lemma 10.7.

- (i) Je-li $A \in M(n \times n)$ symetrická a $C \in M(n \times n)$, pak CAC^T je opět symetrická.
- (ii) Symetrická transformace zachovává symetrii matice.

Věta 10.9. Nechť $A \in M(n \times n)$ je symetrická matice a nechť $B \in M(n \times n)$ vznikne z A pomocí symetrické transformace. Pak matice A je pozitivně definitní (resp. negativně definitní, pozitivně semidefinitní, negativně semidefinitní, indefinitní), právě když B je pozitivně definitní (resp. negativně definitní, . . .).

Věta 10.10. Nechť $A \in M(n \times n)$ je symetrická matice. Pak ji lze symetrickou transformací převést na diagonální matici.

Věta 10.11 (Sylvestrovo kritérium). Nechť $A = (a_{ij})_{i=1, \dots, n, j=1, \dots, n}$ je symetrická matice. Pak matice A je

- pozitivně definitní, právě když pro každé $k \in \{1, \dots, n\}$ platí

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} \end{vmatrix} > 0;$$

- negativně definitní, právě když pro každé $k \in \{1, \dots, n\}$ platí

$$(-1)^k \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} \end{vmatrix} > 0;$$

- pozitivně semidefinitní, právě když pro každou k -tici přirozených čísel $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n, k \in \{1, \dots, n\}$ platí

$$\begin{vmatrix} a_{i_1 i_1} & \dots & a_{i_1 i_k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i_k i_1} & \dots & a_{i_k i_k} \end{vmatrix} \geq 0;$$

- negativně semidefinitní, právě když pro každou k -tici přirozených čísel $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n, k \in \{1, \dots, n\}$ platí

$$(-1)^k \begin{vmatrix} a_{i_1 i_1} & \dots & a_{i_1 i_k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i_k i_1} & \dots & a_{i_k i_k} \end{vmatrix} \geq 0;$$

Vlastní čísla a vektory

Definice. Necht' $A \in M(n \times n)$. Řekneme, že $\lambda \in \mathbb{C}$ je **vlastní číslo matice** A , jestliže existuje nenulový vektor $x \in \mathbb{C}^n$ takový, že $Ax = \lambda x$. Vektor x pak nazýváme **vlastním vektorem matice A příslušným k vlastnímu číslu λ** .

Věta 10.12. Necht' $A \in M(n \times n)$.

(i) Prvek $\lambda \in \mathbb{C}$ je vlastním číslem matice A , právě když $\det(\lambda I - A) = 0$.

(ii) Matice A má nejvýše n různých vlastních čísel.

Definice. Necht' $A \in M(n \times n)$. Funkce $\lambda \mapsto \det(\lambda I - A)$ se nazývá **charakteristický polynom matice** A . Vzhledem k tvrzení (i) předchozí věty definujeme **násobnost vlastního čísla matice** jako násobnost tohoto čísla jakožto kořene charakteristického polynomu.

Věta 10.13. Necht' $A \in M(n \times n)$ je symetrická. Pak jsou její vlastní čísla reálná.

Věta 10.15. Necht' $A \in M(n \times n)$ je symetrická. Pak platí:

- A je pozitivně definitní, právě když jsou všechna její vlastní čísla kladná,
- A je negativně definitní, právě když jsou všechna její vlastní čísla záporná,
- A je pozitivně semidefinitní, právě když jsou všechna její vlastní čísla nezáporná,
- A je negativně semidefinitní, právě když jsou všechna její vlastní čísla nekladná,
- A je indefinitní, právě když má kladné vlastní číslo i záporné vlastní číslo.